Apuntes de

DINÁMICA DE SISTEMAS

Daniel Olivares Caballero

Contenido

[Introducción a la Modelación de Sistemas 4](#_Toc339889541)

[1.1 Conceptos preliminares 4](#_Toc339889542)

[1.1.1 Sistemas 4](#_Toc339889543)

[1.1.2 Señales 4](#_Toc339889544)

[1.1.3 Modelos 4](#_Toc339889545)

[1.1.4 Construcción de los Modelos Matemáticos 4](#_Toc339889546)

[1.1.5 Clasificación de los Modelos Matemáticos 4](#_Toc339889547)

[1.1.6 Sistemas lineales y no lineales variantes e invariantes en el tiempo 4](#_Toc339889548)

[1.2 Modelado de Sistemas Físicos 5](#_Toc339889549)

[1.2.1 Circuitos Eléctricos 5](#_Toc339889550)

[1.2.2 Sistemas traslacionales 5](#_Toc339889551)

[1.2.3 Sistemas rotacionales 5](#_Toc339889552)

[1.2.4 Sistemas fluídicos o hidráulicos 5](#_Toc339889553)

[1.2.5 Sistemas térmicos 5](#_Toc339889554)

[1.2.6 Sistemas híbridos 5](#_Toc339889555)

[1.3 Linealización de modelos matemáticos no lineales 5](#_Toc339889556)

[1.4 Analogías 5](#_Toc339889557)

[Marco Matemático 6](#_Toc339889558)

[2.1 Ecuaciones Diferenciales y de Diferencia 6](#_Toc339889559)

[2.1.1 Ecuaciones Diferenciales 6](#_Toc339889560)

[2.1.2 Ecuaciones Diferenciales con Diferencias 6](#_Toc339889561)

[2.1.3 Definición de ecuación de diferencias (primera diferencia progresiva de la función) 6](#_Toc339889562)

[2.1.4 Ecuaciones de Diferencias Finitas 6](#_Toc339889563)

[2.1.5 Ecuaciones Diferenciales y de Diferencias Lineales 6](#_Toc339889564)

[2.2 Transformada Laplace y Transformada Z 6](#_Toc339889565)

[2.2.1 Definiciones 6](#_Toc339889566)

[2.2.2 Propiedades 8](#_Toc339889567)

[2.2.3 Parejas de Transformadas 8](#_Toc339889568)

[2.2.4 Utilización de la tabla de parejas de transformadas 8](#_Toc339889569)

[2.2.5 Transformadas Inversas por Expansión de Fracciones Parciales en dominio Z 8](#_Toc339889570)

[2.2.6 Transformadas Inversas por Desarrollo de una serie infinita de Potencias en dominio Z 8](#_Toc339889571)

[2.3 Solución de E.D. Lineales mediante transformadas Z 8](#_Toc339889572)

[Práctica 1 9](#_Toc339889573)

[Example: DC Motor Speed Modeling 9](#_Toc339889574)

[1. Transfer Function 10](#_Toc339889575)

[Physical Setup 10](#_Toc339889576)

[System Equations 11](#_Toc339889577)

[1. Transfer Function 12](#_Toc339889578)

[Análisis de Sistemas Dinámicos Lineales 13](#_Toc339889579)

[Diagramas de blocks 13](#_Toc339889580)

[Fórmula de Mason 19](#_Toc339889581)

# Introducción a la Modelación de Sistemas

## 1.1 Conceptos preliminares

### 1.1.1 Sistemas

Sistema: Es un conjunto de elementos que interactúan entre sí para conseguir un fin común.

Ejemplos de Diferentes tipos de sistemas

Clasificación de sistemas

### 1.1.2 Señales

Definición de señal

Tipos de señales

### 1.1.3 Modelos

Definición de modelo

Aplicaciones de los modelos matemáticos: Diseño, operación

### 1.1.4 Construcción de los Modelos Matemáticos

Pasos:

1. Bases: Conocimiento de las leyes físicas que intervienen en el sistema a modelar, por ejemplo leyes de Kirchhoff para circuitos eléctricos, termodinámica para sistemas térmicos, conservación de movimiento para sistemas mecánicos, etc.
2. Suposiciones
3. Congruencia matemática de las ecuaciones
4. Solución de las ecuaciones
5. Validación

Leyes físicas:

### 1.1.5 Clasificación de los Modelos Matemáticos

Clasificaciones de modelos: Lineales, no lineales, diferenciales, función de transferencia, variables de estado; experimentales, teóricos, mixtos, continuos, discretos, híbridos.

### 1.1.6 Sistemas lineales y no lineales variantes e invariantes en el tiempo

Definición de linealidad, consecuencias de la linealidad

Definición de no lineal

Definición de variancia e invariancia en el tiempo.

## 1.2 Modelado de Sistemas Físicos

### 1.2.1 Circuitos Eléctricos

### 1.2.2 Sistemas traslacionales

### 1.2.3 Sistemas rotacionales

### 1.2.4 Sistemas fluídicos o hidráulicos

### 1.2.5 Sistemas térmicos

### 1.2.6 Sistemas híbridos

### 1.3 Linealización de modelos matemáticos no lineales

### 1.4 Analogías

# Marco Matemático

## 2.1 Ecuaciones Diferenciales y de Diferencia

### 2.1.1 Ecuaciones Diferenciales

### 2.1.2 Ecuaciones Diferenciales con Diferencias

### 2.1.3 Definición de ecuación de diferencias (primera diferencia progresiva de la función)

### 2.1.4 Ecuaciones de Diferencias Finitas

### 2.1.5 Ecuaciones Diferenciales y de Diferencias Lineales

#### 2.1.5.1 Linealidad

#### 2.1.5.2 E.D. Lineales

#### 2.1.5.3 Métodos de solución de E.D. Lineales

## 2.2 Transformada Laplace y Transformada Z

### 2.2.1 Definiciones

#### 2.2.1.1 Transformada de Laplace

**TRANSFORMADA DE LAPLACE**

Considere *f(t)* definida para *t*≥0, se define



donde *s* es una variable compleja, s = σ+jω.

Ejemplo: 

 , si Re(s) > Re(-a) (Región de convergencia)

Ejemplo: 

Propiedades:

1. Linealidad: 
2. Traslación. 
3. Teorema del valor final 
4. Teorema del valor inicial 
5. Diferenciación 



1. Integración 

**Antitransformada de Laplace**



**Fracciones Parciales**



Método de Residuos











#### 2.2.1.2 Transformada Z

### 2.2.2 Propiedades

### 2.2.3 Parejas de Transformadas

### 2.2.4 Utilización de la tabla de parejas de transformadas

### 2.2.5 Transformadas Inversas por Expansión de Fracciones Parciales en dominio Z

### 2.2.6 Transformadas Inversas por Desarrollo de una serie infinita de Potencias en dominio Z

## 2.3 Solución de E.D. Lineales mediante transformadas Z

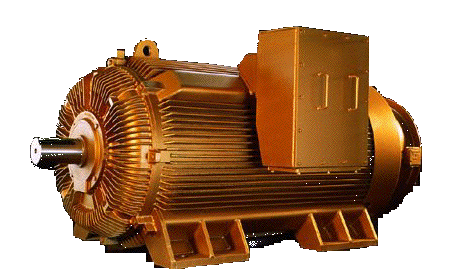
# Práctica 1

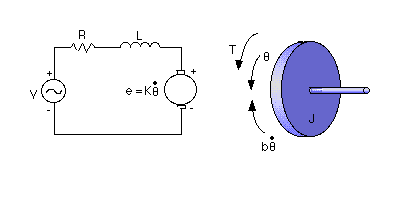
Circuito RC

Circuito RLC

## Example: DC Motor Speed Modeling

[Physical setup and system equations](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor/motor.html#Problem)

Un actuador común en los sistemas de control es el motor de DC. Este proporciona directamente movimiento rotatorio y, junto con ruedas o poleas y cables, puede proporcionar un movimiento de traslación. El circuito eléctrico de la armadura y el diagrama de cuerpo libre del rotor se muestran en la siguiente figura:



Para este ejemplo, vamos a asumir los siguientes valores para los parámetros físicos:

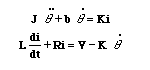
\* moment of inertia of the rotor (J) = 0.01 kg.m^2/s^2  
\* damping ratio of the mechanical system (b) = 0.1 Nms  
\* electromotive force constant (K=Ke=Kt) = 0.01 Nm/Amp  
\* electric resistance (R) = 1 ohm   
\* electric inductance (L) = 0.5 H  
\* input (V): Source Voltage  
\* output (theta): position of shaft  
\* The rotor and shaft are assumed to be rigid

The motor torque, **T**, is related to the armature current, **i**, by a constant factor **Kt**. The back emf, **e**, is related to the rotational velocity by the following equations:

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor/Mfo1.GIF

In SI units (which we will use), **Kt** (armature constant) is equal to **Ke** (motor constant).

From the figure above we can write the following equations based on Newton's law combined with Kirchhoff's law:



### 1. Transfer Function

Using Laplace Transforms, the above modeling equations can be expressed in terms of s.

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor/Mfo3.GIF

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor/Mfo4.GIF

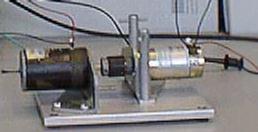
By eliminating I(s) we can get the following open-loop transfer function, where the rotational speed is the output and the voltage is the input.

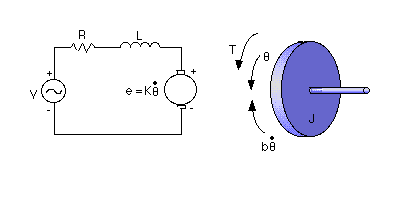
http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor/Mfo9.GIF

Example: Modeling DC Motor Position

[Physical Setup](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/motor.html#Problem)  
[System Equations](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/motor.html#equations)  
[Design Requirements](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/motor.html#criteria)  
[Matlab Representation and Open-Loop Response](http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/motor.html#Matlab)

## Physical Setup

A common actuator in control systems is the DC motor. It directly provides rotary motion and, coupled with wheels or drums and cables, can provide transitional motion. The electric circuit of the armature and the free body diagram of the rotor are shown in the following figure:



For this example, we will assume the following values for the physical parameters. These values were derived by experiment from an actual motor in Carnegie Mellon's undergraduate controls lab.

\* moment of inertia of the rotor (J) = 3.2284E-6 kg.m^2/s^2  
\* damping ratio of the mechanical system (b) = 3.5077E-6 Nms  
\* electromotive force constant (K=Ke=Kt) = 0.0274 Nm/Amp  
\* electric resistance (R) = 4 ohm   
\* electric inductance (L) = 2.75E-6 H  
\* input (V): Source Voltage  
\* output (theta): position of shaft  
\* The rotor and shaft are assumed to be rigid

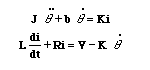
## System Equations

The motor torque, **T**, is related to the armature current, **i**, by a constant factor **Kt**. The back emf, **e**, is related to the rotational velocity by the following equations:

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/Mfo1.GIF

In SI units (which we will use), **Kt** (armature constant) is equal to **Ke** (motor constant).

From the figure above we can write the following equations based on Newton's law combined with Kirchhoff's law:



### 1. Transfer Function

Using Laplace Transforms the above equations can be expressed in terms of s.

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/Mfo3.GIF

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/Mfo4.GIF

By eliminating I(s) we can get the following transfer function, where the rotating speed is the output and the voltage is an input.

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/Mfo5.GIF

However during this example we will be looking at the position, as being the output. We can obtain the position by integrating Theta Dot, therefore we just need to divide the transfer function by s.

http://www.engin.umich.edu/group/ctm/examples/motor2/Mfo8.GIF

# Análisis de Sistemas Dinámicos Lineales

## Diagramas de blocks

Los diagramas de blocks son una representación gráfica de las ecuaciones que describen el comportamiento de un sistema. Esta representación puede ser simplificada mediante el siguiente álgebra de blocks.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Transformación** | **Ecuación** | **Diagrama original** | **Diagrama equivalente** |
| Blocks en cascada |  |  |  |
| Blocks en cascada |  |  |  |
| Blocks en retroalimentación |  |  |  |
| Desplazamiento de un punto de suma después de un block |  |  |  |
| Desplazamiento de un punto de suma antes de un block |  |  |  |
| Desplazamiento de un punto de toma después de un block |  |  |  |
| Desplazamiento de un punto de toma antes de un block |  |  |  |
| Cambio de puntos de suma |  |  |  |
| Separación de un punto de suma |  |  |  |

Ejemplo: Simplificar el diagrama de blocks













Ejemplo:

















Ejemplo















## Fórmula de Mason



: Vértice de salida.

: Vértice de entrada.

: Ganancia del k-ésimo camino directo.

: 1 - [Suma de las ganancias de todos los lazos] + [Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de dos lazos disjuntos] - [Suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de tres lazos disjuntos] + ...

: Se obtiene aplicando la ecuación para  a la parte del diagrama que sea disjunto al k-ésimo camino directo.

Lazos disjuntos: Lazos que no tienen vértices en común.

Diagrama disjunto: Parte del diagrama que no tiene vértices en común con el camino directo que se está analizando.

Ejemplo: Hallar la función de transferencia 



n = 3 caminos directos



Camino directo #1:



  Porque no existe parte del diagrama que sea disjunto a este camino

Camino directo #2:



Camino directo #3



  Porque no existe parte del diagrama que sea disjunto a este camino

Lazos:









Ejemplo: Simplificar el siguiente diagrama de flujo



n = 2 caminos directos



Camino directo #1



Camino directo #2



Lazos:









Simplificar el siguiente diagrama de flujo:



n = 4 caminos directos



Camino directo #1



Camino directo #2



Camino directo #3



Camino directo #4



Lazos:



Lazos disjuntos: 1 y 5



